

Rezepte für den Casio FX-9860 GII

Betriebssystem ab Version 2.04

Ebenfalls einsetzbar für Casio FX-CG 20 und FX-CG 50


- 1 Grundlagen der Bedienung
- 2 Funktionen entdecken
- 3 Winkelfunktionen
- 4 Nullstellen
- 5 Schnittpunkte
- 6 Steigung und Extrempunkte
- 7 Tangenten
- 8 Krümmung und Wendepunkte
- 9 Lineare Gleichungssysteme
- 10 Integrale
- 11 Häufigkeitsverteilungen
- 12 Binomialverteilungen
- 13 Stochastische Prozesse
- 14 Vektoren

Grundlagen der Bedienung



Bedienkonzept

Die zentrale Navigation erfolgt über die **MENU** Taste. Mit der großen **Navigationstaste** wählt man im Hauptmenü den gewünschten **Modus** aus und aktiviert ihn mittels **EXE** Taste.

Im **Rechenmodus**  funktioniert der GTR wie ein normaler Taschenrechner.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sich der GTR im Rechenmodus befindet.

Einige GTR-Befehle stehen direkt auf den Tasten. Weitere Befehle stehen oberhalb der Tasten. Um sie zu erreichen, muss man vorher die orangefarbene **SHIFT** Taste bzw. die rote **ALPHA** Taste drücken. Die Mehrzahl der Befehle erreicht man jedoch über die **Befehlszeile**, die am unteren Rand des Displays angezeigt wird und bis zu sechs verschiedene Befehle zur Auswahl enthält. Um einen solchen Befehl zu nutzen, drückt man diejenige Funktionstaste **F1** bis **F6**, die sich direkt unterhalb des gewünschten Befehls befindet.

Mit Hilfe der Tasten **OPTN** und **VAR** lässt sich die Befehlszeile mit weiteren Befehlen ausstatten. Mit der **EXIT** Taste gelangt man wieder zurück zum ursprünglichen Zustand der Befehlszeile.


Grundeinstellungen vornehmen

Damit Ergebnisse optimal dargestellt werden, müssen die Grundeinstellungen des GTR stimmen, die im **Setup** eingestellt werden: **SHIFT** **MENU** **{SETUP}**

Es erscheint die rechts abgebildete Liste. Wichtig sind vor allem die (nur in der Abbildung!) fett gedruckten Werte, die sich von den Werkseinstellungen unterscheiden. **Achtung:** Beim Reset des GTR erfolgt eine Rücksetzung auf die Werkseinstellungen.

Input/Output	:Math
Mode	:Comp
Frac Result	:ab/c
Func Type	:Y=
Draw Type	:Connect
Derivative	:Off
Angle	:Rad
Complex Mode	:Real
Coord	:On
Grid	:Off
Axes	:On
Label	:Off
Display	:Norm2
Simplify	:Auto



Reset durchführen

Vor jeder Klausur muss ein Reset des GTR durchgeführt werden, um zu verhindern, dass unzulässige Daten im GTR gespeichert sind. Das geht so: **MENU**  **F5** **RESET** **F6** **>** **F2** **ALL**.


Nun muss der Reset noch mit **F1** (in der Klausur: durch den Lehrer!) bestätigt werden.

Danach müssen die gewünschten Grundeinstellungen (s.o.) wieder neu festgelegt werden.

Ein- und Ausgabe von Zahlen und Termen

Brüche werden über die  Taste eingegeben. **Achtung:** Zur Eingabe von gemischten Zahlen wie z.B. $1\frac{2}{3}$ muss man die spezielle Eingabemaske für gemischte Zahlen verwenden: **SHIFT** .

Wenn man stattdessen den ganzzahligen Teil einfach vor einen normalen Bruch schreibt, sieht es zwar (fast) genau so aus, wird aber als Multiplikation aufgefasst – der Wert ist ein anderer!

Die Eingabe von Exponenten größer als 2 erfolgt über die  Taste. **Achtung:** Bei Potenzen mit negativer Basis *müssen* (wie in der Mathematik) Klammern gesetzt werden. Beispiel:

Wenn $f(x) = -0,5 \cdot x^4$ für $x = -2$ berechnet werden soll, muss man eingeben: $-0,5 \times (-2)^4$

Will man eine fehlerhafte Eingabe löschen, dann kann man entweder das Zeichen links von der Schreibmarke mit **DEL** löschen oder die gesamte Eingabezeile mit **AC/ON**.

Nicht-ganzzahlige Ergebnisse werden zunächst immer als Dezimalbrüche angezeigt. Über die Taste **F-D** kann man sie – falls möglich – als Bruch bzw. gemischte Zahl darstellen. Zwischen der Darstellung als Bruch bzw. gemischter Zahl kann man mittels **SHIFT** **F-D** umschalten.

Hilfreich: Das letzte Rechenergebnis lässt sich über **SHIFT** **(←)** **{Ans}** wieder aufrufen und so in einer Folgerechnung ohne erneute Eingabe wieder verwenden.



Funktionen entdecken

Aufgabe: Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ tabellarisch und graphisch darstellen.

1. Funktionsterm eingeben:

Sicherstellen, dass der richtige Graphentyp eingestellt ist:

Dann den Funktionsterm eingeben: $Y1 = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Darauf achten, dass nur **Y1** aktiv ist. Alle anderen Terme in der Liste mit entfernen oder mittels auf inaktiv setzen („deselektieren“).

2. Zeichenfenster sinnvoll einstellen:

Zeichenfenster auf Grundeinstellung setzen: {V-Window}

Danach {V-Window} zunächst mittels verlassen und den Graph zeichnen mit .

Ergebnis betrachten und dann das x- und y-Zeichenintervall über {V-Window} optimieren:

Xmin, Xmax, Ymin, Ymax so wählen, dass alle markanten Punkte des Graphen zu sehen sind und gleichzeitig möglichst wenig Zeichenfläche ungenutzt bleibt.

Gute Werte für unser Beispiel sind: $-3 \leq x \leq 3$ und $-1 \leq y \leq 5$

Zusätzlich kann das Zeichenfenster nach dem Zeichnen mit den Pfeiltasten in die jeweilige Richtung verschoben werden. Die Werte in {V-Window} werden dadurch verändert.

3. Graph abfahren:

Graph zeichnen mit und dann {Trace} auswählen. Auf dem Graphen erscheint die Trace-Marke, mit der man mittels Navigationstaste (und) den Graphen abfahren kann.

Die Koordinaten des jeweiligen Punktes werden dazu angezeigt.

Die Schrittweite ergibt sich aus dem in {V-Window} eingestellten x-Bereich. Sie kann auch manuell geändert werden über den Wert dot in {V-Window}. Stellt man dot: 0.05 ein, dann beträgt die Schrittweite für die x-Werte im Trace-Modus 0,05. Beachte: Der Wert für Xmax wird dadurch verändert und beträgt nun Xmax: 3.3.

Tipp: Um die Trace-Marke auf einen bestimmten Punkt des Graphen zu setzen, kann man den x-Wert dieses Punktes direkt über die Tastatur eingeben und mit bestätigen.

4. Wertetabelle darstellen:

Es erscheinen die gleichen Terme, die im Modus eingegeben wurden, jedoch können die Selektionen abweichen. Für unser Beispiel nur **Y1** auswählen.

Startwert, Endwert und Schrittweite für die Wertetabelle über festlegen. Wir wählen den Bereich von -3 bis 3 , Schrittweite $0,5$. Die Eingaben jeweils mit bestätigen und dann das Fenster mit verlassen. Jetzt über die Wertetabelle erzeugen.

Tipp: Um y-Werte für einen x-Wert berechnen zu lassen, der nicht in der Tabelle steht, kann man diesen x-Wert über die Tastatur direkt eingeben und mit bestätigen. Die aktuelle Tabellenzeile wird dann mit dem neuen x-Wert und den zugehörigen y-Werten ausgefüllt. Mittels kann man aber auch eine zusätzliche Tabellenzeile einfügen und diese dann für einen beliebigen x-Wert befüllen lassen.

Tipp: Mit der Navigationstaste kann man durch die Tabelle wandern. Der ausgewählte Wert wird unten im Display mit maximaler Genauigkeit dargestellt und kann über die Taste auch in einen Bruch umgewandelt werden, sofern es eine rationale Zahl ist. Die Bruchdarstellung muss man allerdings lesen können: statt z.B. $1\frac{2}{3}$ steht dort nämlich 1,2,3.



Winkelfunktionen

Maßeinheiten für Winkel

Damit bei der Anwendung der Winkelfunktionen vom GTR die richtigen Ergebnisse (y-Werte) berechnet werden können, benötigt der GTR (wie jeder Taschenrechner) eine Grundeinstellung für die Winkeleinheit. Dies geschieht im {SETUP} (↗GTR-Rezept 2). Zur Verfügung stehen:

Deg (engl. degree = Gradmaß, die in der Geometrie übliche Einheit für Winkelmaße), **Rad** (engl. radian = Bogenmaß, die im Umgang mit Funktionen übliche Einheit) und **Gra** (engl. grad = Neugrad, nur im Vermessungswesen gebräuchlich. Achtung: „Gefährliche Abkürzung“!).

Wir verwenden ausschließlich die **Grundeinstellung Bogenmaß (Rad)**. Das heißt: $\sin(30)$ berechnet nicht den Sinuswert für einen Winkel von 30° , sondern von 30 rad, d.h. als Wert in der Einheit Bogenmaß. Will man jedoch tatsächlich $\sin(30^\circ)$ berechnen, dann muss das Gradzeichen mit angegeben werden – dies entspricht im Übrigen der mathematisch korrekten Schreibweise. Leider ist der Weg zum Gradzeichen umständlich. $\sin\langle 90^\circ \rangle$ berechnet man so:

\sin \langle 9 0 \rangle \langle OPTN \rangle \langle F1 \rangle \langle EXE \rangle Alternativ kann \langle SHIFT \rangle {CATALOG} verwendet werden. Dies liefert eine (alphabetische) Liste *aller* Befehle des GTR (das Gradzeichen ist ziemlich am Ende der Liste). Da sich {CATALOG} den zuletzt aufgerufenen Befehl merkt, kann man $\sin\langle 90^\circ \rangle$ künftig auch so eingeben: \sin \langle 9 0 \rangle \langle SHIFT \rangle {CATALOG} \langle EXE \rangle \langle EXE \rangle

Tip: Zur Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß einfach den Winkel in Gradmaß (mit Gradzeichen) eingeben und \langle EXE \rangle drücken: \langle 1 8 0 \rangle \langle SHIFT \rangle {CATALOG} \langle EXE \rangle \langle EXE \rangle liefert als Ergebnis π .

Rechnen mit Winkelfunktionen

Sucht man zu einem Funktionswert der Sinusfunktion den zugehörigen Winkel, dann benötigt man ihre Umkehrfunktion, die so genannten **Arkussinusfunktion arcsin()**, auf dem GTR über

\langle SHIFT \rangle {sin⁻¹} erreichbar. Die Schreibweise $\sin^{-1}(x)$ ist sehr unglücklich, weil dies auch $\frac{1}{\sin(x)}$

bedeuten kann, und ist im Unterricht daher **nicht zulässig!**

Beispiel für eine richtige Schreibweise: $\arcsin(0,5)$. GTR-Eingabe: \langle SHIFT \rangle \langle sin \rangle {sin⁻¹} 0 \langle . \rangle 5

Da es unendlich viele Winkel x mit $\sin(x)=0,5$ gibt, wird nur der (betragsmäßig) kleinste Winkel im Intervall $[-\pi; \pi]$ berechnet, dessen Sinuswert 0,5 ist. Dies ist der Winkel $x = \frac{1}{6}\pi$ bzw. $\alpha = 30^\circ$

Beachte: Der GTR erlaubt bei den Winkelfunktionen auch eine Schreibweise ohne Klammern: $\sin \pi$ statt $\sin(\pi)$. Im Heft darf man jedoch die **Klammern nicht weggelassen**, da es sich um Funktionen handelt und dies die (in der Schule) übliche Schreibweise ist.

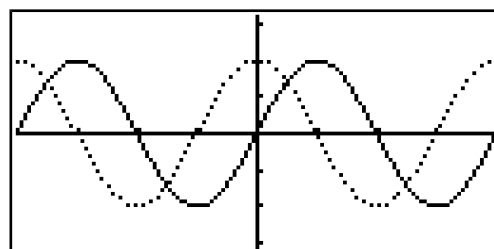
Aufgabe: Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ zeichnen.

Die Graphen der Winkelfunktionen lassen sich in bekannter Weise zeichnen (↗GTR-Rezept 3). Durch die Verwendung der Einheit Bogenmaß und die Tatsache, dass die markanten Punkte der Winkelfunktionen an Stellen liegen, die nur als Bruchteile (oder Vielfache) von π exakt angegeben werden können, verwendet man für die Einteilung der x-Achse ebenfalls Bruchteile von π (beim Zeichnen im Heft z.B. 4 cm für π LE). Darum also zunächst das Zeichenfenster auf die *trigonometrische* Grundeinstellung setzen: \langle SHIFT \rangle {V-Window} \langle TRIG \rangle

Jetzt ist $X_{min} = -9.4248$, $X_{max} = 9.4248$ und $X_{scale} = 1.5708$. Das entspricht dem Intervall $[-3\pi; 3\pi]$ mit Achsenmarkierungen im Abstand von $\frac{1}{2}\pi$. Die Abstände sind gut, als Intervall genügt aber $[-2\pi; 2\pi]$. Die Werte für X_{min} und X_{max} entsprechend ändern. Die Einstellungen für die y-Achse sind gut und bleiben so: $y \in [-1,6; 1,6]$ und als Markierungsabstände 0,5.

Wir setzen nun $Y1 = \sin(x)$ und $Y2 = \cos(x)$ und den Zeichenstil für **Y2** auf „gepunktet“.

Das Ergebnis sollte dann so aussehen wie hier abgebildet.



Nullstellen



Aufgabe: Nullstellen bestimmen für $f(x) = \frac{1}{100}x^6 - \frac{3}{100}x^5 - \frac{9}{50}x^4 + \frac{29}{50}x^3 + \frac{9}{20}x^2 - \frac{27}{20}x - \frac{27}{25}$.

Rationale Werte immer als Bruchzahl notieren! Näherungswerte auf 4 Nachkommastellen runden.

Graphisches Lösen

1. Term $f(x)$ als **Y1** eingeben. Dann das Zeichenfenster über **{V·Window}** sinnvoll einstellen (\nearrow GTR-Rezept 3) und den Graphen zeichnen lassen.
2. Wenn der Graph fertig gezeichnet ist, die erste Nullstelle berechnen: **{G·Solv}** (engl. root = Wurzel. Nullstellen werden auch als „Wurzeln“ bezeichnet.) Die erste Nullstelle wird angezeigt. Die Suche nach der nächsten Nullstelle wird mit der Taste gestartet.

Vorteile der Methode: Man kann sich die Nullstellen als Teil des Graphen ansehen und so auch die Vielfachheit der Nullstelle erkennen. Das Verständnis wird gefördert. Für das Beispiel gilt: einfache Nullstelle bei $x=-4$, doppelte Nullstelle bei $x=-1$ und dreifache Nullstelle bei $x=3$.

Nachteile der Methode: Es werden nur die Nullstellen gefunden, die im Intervall $[Xmin; Xmax]$ liegen, das in **{V·Window}** eingestellt wurde. Und: Die Taste zur Änderung der Zahlendarstellung ist nicht benutzbar.

Gleichungslöser

1. Hinter **solveN<** den Funktionsterm von f eingeben, durch **=0>** ergänzen und drücken.
2. Nun werden alle Lösungen der Gleichung $f(x)=0$ berechnet. Am Ende der Berechnung erscheint eine Meldung, dass es noch weitere Lösungen geben könnte. In der Regel ist das aber nicht der Fall. Nach Bestätigung mit werden die ermittelten Lösungen (in diesem Fall also wegen $f(x)=0$ die Nullstellen) durch Komma getrennt angezeigt.

Tipp: Wenn man den Funktionsterm $f(x)$ zuvor im Graph-Modus z.B. als **Y1** eingibt, dann kann man die Nullstellen mit **solveN<Y1=0>** berechnen. Wenn auf der rechten Seite eine Null steht (wie bei der Nullstellenberechnung) genügt sogar **solveN<Y1>**.

Y1 erreicht man über . Achtung: funktioniert nicht!

Vorteile der Methode: Man erhält (normalerweise) alle Nullstellen auf einmal, im günstigsten Fall sogar exakte Werte (Bruchdarstellung), denn die Taste zur Änderung der Zahlendarstellung ist benutzbar. Und: Das Zeichnen des Graphen und das Einstellen des Zeichenfensters ist nicht erforderlich. Außerdem eignet sich **solveN** zum Lösen beliebiger Gleichungen.

Nachteile der Methode: Man erhält keine Informationen über die Vielfachheit der Nullstellen.

Spezieller Gleichungslöser für Polynome

1. Unser Polynom ist 6.Grades, also
2. In die einzelnen Felder werden nur die Koeffizienten des Polynoms eingegeben, also: $\frac{1}{100}$ $-\frac{3}{100}$ $-\frac{9}{50}$ usw. Achtung: Brüche werden dargestellt als $1\frac{1}{100}$, $-3\frac{1}{100}$, $-9\frac{1}{50}$ usw.

Nach Eingabe aller Koeffizienten die Gleichung mit lösen.

Die Lösungen erscheinen als Liste untereinander, die Vielfachheit der Nullstelle wird zusätzlich angezeigt (*3: dreifache Nullstelle). Über lässt sich die Zahlendarstellung ändern.

Vorteile der Methode: Man erhält garantiert alle Nullstellen und deren Vielfachheit.

Nachteile der Methode: Die Eingabe ist gewöhnungsbedürftig. Auch wenn der Term zuvor schon (z.B. als **Y1** im Graph-Modus) eingegeben wurde, müssen alle Koeffizienten erneut eingegeben werden. Außerdem lassen sich mit diesem Gleichungslöser nur Polynomgleichungen lösen, d.h. er eignet sich nur für Berechnungen bei ganzrationalen Funktionen.

Schnittpunkte



Aufgabe: Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x - 2$ und $g(x) = 2x^2 - 4$ bestimmen.

Rationale Werte immer als Bruchzahl notieren! Näherungswerte auf 4 Nachkommastellen runden.

Graphisches Lösen

1. Term $f(x)$ als **Y1** und $g(x)$ als **Y2** eingeben. Dann das Zeichenfenster über **{V-Window}** sinnvoll einstellen (\nearrow GTR-Rezept 3) und die Graphen zeichnen lassen.
2. Wenn die Graphen fertig gezeichnet sind, Schnittpunkte berechnen lassen: **{G-Solv}** (engl. intersection = Schnitt). Die Koordinaten des ersten Schnittpunktes werden angezeigt: (0,8399|-1,3082). Die Suche nach dem nächsten Schnittpunkt wird mit der Taste gestartet und liefert als Ergebnis (2,5163|-3,4669). Weitere Schnittpunkte werden nicht gefunden.

Vorteile der Methode: Es wird nicht nur die Schnittstelle geliefert, sondern der zugehörige y-Wert gleich mit. Außerdem kann man sich Schnittpunkte als Teil des Graphen ansehen und mögliche Besonderheiten erfassen. Das Verständnis wird dadurch gefördert.

Nachteile der Methode: Es werden nur diejenigen Schnittpunkte gefunden, die im Intervall $[X_{\min}; X_{\max}]$ liegen, das in **{V-Window}** eingestellt wurde. Und: Die Taste zur Änderung der Zahlendarstellung ist nicht benutzbar.

Gleichungslöser

1. Sofern nicht schon geschehen, sollte man zunächst die Terme $f(x)$ und $g(x)$ als **Y1** und **Y2** im Graph-Modus eingeben. Da man auch im Rechenmodus darauf zurückgreifen kann, spart man Zeit und reduziert mögliche Eingabefehler. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass beide Funktionsterme als **Y1** und **Y2** eingegeben wurden.

Nun den Gleichungslöser aufrufen:

2. Bekanntlich werden Schnittstellen berechnet, indem man die Funktionsterme gleichsetzt: $\text{solveN}\langle Y1=Y2 \rangle$ eingeben und dann drücken. Erinnerung (\nearrow GTR-Rezept 4): **Y1** erreicht man über und **Y2** entsprechend, das Gleichheitszeichen mit $\{=\}$. Nun werden alle Lösungen der Gleichung $f(x)=g(x)$ berechnet. Am Ende der Berechnung erscheint eine Meldung, dass es noch weitere Lösungen geben könnte. In der Regel ist das aber nicht der Fall. Nach Bestätigung mit werden die ermittelten Lösungen (d.h. die Schnittstellen von f und g) durch Komma getrennt angezeigt:

$\{-11,3562 ; 0,8399 ; 2,5163\}$. Um alle drei Werte ablesen zu können, muss man mit der Navigationstaste erst mit in diese Zeile wechseln und dann mit die Zeile durchlaufen.

Beobachtung: Obwohl mit der graphischen Methode nur zwei Schnittpunkte gefunden wurden, liefert der Gleichungslöser drei Schnittstellen. Erklärung: Das Zeichenfenster war zu klein, der Wert $-11,3562$ lag außerhalb des gewählten x -Intervalls in **{V-Window}**. Der dritte Schnittpunkt lautet übrigens $(-11,3562|352,7751)$, die Berechnungsmethode folgt unten.

Vorteile der Methode: Man erhält (normalerweise) alle Schnittstellen auf einmal und im günstigsten Fall sogar exakte Werte (Bruchzahlen), denn die Taste ist benutzbar.

Nachteil der Methode: Die y-Werte fehlen und müssen separat berechnet werden.

Berechnung von y-Werten der Funktion Y1 zu bestimmten x-Werten

Variante 1: Im **Tabellenmodus** die Wertetabelle zur Funktion **Y1** anzeigen lassen und die x -Werte eingeben (\nearrow GTR-Rezept 3). Die y -Werte werden in der Wertetabelle angezeigt.

Variante 2: Im **Rechenmodus** die x -Werte als Argument der Funktion **Y1** verwenden.

Für $x=2$ sieht das so aus $Y1\langle 2 \rangle$ und wird so eingegeben:



Steigung und Extrempunkte

Aufgabe: Steigungsverhalten und lokale Extrempunkte für $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 2\frac{1}{4}x - 2$.

Rationale Werte immer als Bruchzahl notieren! Näherungswerte auf 4 Nachkommastellen runden.

Graphisches Lösen

1. Term $f(x)$ als **Y1** eingeben. Dann das Zeichenfenster über **{V·Window}** sinnvoll einstellen (\nearrow GTR-Rezept 3) und den Graphen zeichnen lassen.
2. Wenn der Graph fertig gezeichnet ist, die lokalen Hoch- und Tiefpunkte berechnen lassen: **{G·Solv}** bzw. . Der GTR ermittelt nun den ersten Extrempunkt des ausgewählten Typs. Weitere Punkte des gleichen Typs lassen sich jeweils mit berechnen.
Der betrachtete Graph hat keinen lokalen Hochpunkt und genau einen lokalen Tiefpunkt bei TP(1,5|−4,3203). Der erkennbare Sattelpunkt bei $x=-3$ ist *kein* lokaler Extrempunkt und lässt sich im Graph-Modus nicht direkt berechnen.
3. Wenn alle lokalen Extremstellen bekannt sind, lassen sich die Monotonieintervalle angeben:
Für $x < 1,5$ ist der Graph streng monoton fallend (am Graphen erkennbar)
Für $x > 1,5$ ist der Graph streng monoton steigend (am Graphen erkennbar)

Tipp: Man erhält nützliche Informationen, wenn man *zusätzlich* den Graphen von $f'(x)$ als **Y2** anzeigen lässt, und zwar möglichst mit anderem Zeichenstil. Einstellung über **STYL**.

Vorteile der Methode: Man sieht den Graphen und bekommt einen Gesamteindruck – das Verständnis wird gefördert. Und: Die y -Werte der lokalen Extrempunkte werden mitgeliefert.

Nachteile der Methode: Es werden nur Extremstellen gefunden, die im Zeichenfenster liegen. Ergebnisse werden immer als Dezimalbruch angezeigt, auch wenn es eine Bruchdarstellung gibt. Die Taste zur Änderung der Zahlendarstellung ist nicht benutzbar.

Gleichungslöser

1. Sofern nicht schon geschehen: Terme $f(x)$ und $f'(x)$ als **Y1** und **Y2** im Graph-Modus eingeben. Nun den Gleichungslöser aufrufen: **CALC SOLV**
2. Da nur dort lokale Extremstellen sein können, wo $f'(x)=0$ ist (notwendige Bedingung), berechnen wir die Nullstellen von f' . Das Vorgehen ist das gleiche wie bei der Nullstellenberechnung (\nearrow GTR-Rezept 5). **solVn(Y2)** liefert -3 und $1\frac{1}{2}$ als potentielle Extremstellen. Mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums (hinreichende Bedingung) wird nun geprüft, ob es sich tatsächlich um Extremstellen handelt. Dazu müssen Funktionswerte von f' , also von **Y2** links und rechts der potentiellen Extremstelle berechnet werden. Dies ist bekanntlich (\nearrow GTR-Rezept 6) direkt im Rechenmodus möglich: **Y2(-4)** liefert $f'(-4) = -\frac{11}{12}$, d.h. der Graph ist links von der Stelle $x=-3$ fallend. **Y2(-2)** liefert $f'(-2) = -\frac{7}{12}$, der Graph ist rechts von -3 ebenfalls fallend: es liegt also kein Extrempunkt, sondern ein Sattelpunkt vor! Schließlich wird noch die Steigung rechts von $x=1,5$ berechnet: **Y2(2)** liefert $f'(2) = 2\frac{1}{12}$, der Graph steigt also rechts von $1,5$. Demnach liegt bei $x=1,5$ ein lokaler Tiefpunkt vor.
Da die Extrempunkte verlangt sind, müssen noch die y -Werte zu den lokalen Extremstellen berechnet werden. Mittels **Y1(-3)** bzw. **Y1(1.5)** erhalten wir als y -Werte $1\frac{3}{8}$ bzw. $-4\frac{41}{128}$.
3. Die Monotonieintervalle lassen sich nun ebenfalls angeben:
Für $x < 1,5$ ist der Graph streng monoton fallend (weil gemäß Rechnung $f'(-2) = -\frac{7}{12} < 0$ ist)
Für $x > 1,5$ ist der Graph streng monoton steigend (weil gemäß Rechnung $f'(2) = 2\frac{1}{12} > 0$ ist)

Vorteile der Methode: Es lassen sich so auch Sattelpunkte bestimmen. Außerdem lässt sich die Taste nutzen und verhilft einem so im günstigsten Fall zu exakten Werten.

Nachteile der Methode: Man sieht den Graphen nicht und die Berechnung ist aufwändiger.



Tangenten

Aufgabe: Tangente an den Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - x + 2$ an der Stelle -1 .

Rationale Werte immer als Bruchzahl notieren! Näherungswerte auf 4 Nachkommastellen runden.

Tangentengleichung fix und fertig vom GTR

In den Grundeinstellungen **[SHIFT] [SETUP] Derivative: On** (engl. derivative = Ableitung) einstellen. Es bewirkt, dass beim Abfahren des Graphen und bei der Darstellung der Wertetabelle zusätzlich der Wert der 1. Ableitung angezeigt wird und ist die Voraussetzung dafür, dass die Tangente an einen Graphen an einer frei wählbaren Stelle automatisch ermittelt werden kann.

1. **[MENU] [GRAPH] [F5]** Term $f(x)$ als **Y1** eingeben. Dann das Zeichenfenster über **{V-Window}** sinnvoll einstellen (↗GTR-Rezept 3) und den Graphen zeichnen lassen.
2. Wenn der Graph fertig gezeichnet ist, die Tangente einzeichnen und die Tangentengleichung anzeigen lassen: **{Sketch} [TanS] [=] [1] [EXE] [EXE]** (-1 wegen $x=-1$ laut Aufgabenstellung).
Die Tangente wird gezeichnet, die Gleichung angezeigt: $Y=-0.8X+2.2666$.
Auch der y -Wert des Berührungspunktes wird angezeigt: $Y=3.05555557$

Hinweis: Obwohl die Tangente eingezeichnet ist und es im weiteren Verlauf einen Schnittpunkt $S(0,8|1,6267)$ mit dem Graphen von f gibt, lässt sich dieser nicht automatisch berechnen, sondern nur auf dem bekannten Wege der Schnittpunktberechnung (↗GTR Rezept 6).

Vorteile der Methode: Sehr komfortabel, der GTR macht (fast) alles alleine! Außerdem sieht man Graph und Tangente – das Verständnis wird gefördert.

Nachteile der Methode: Die Koeffizienten der Tangentengleichung sind nur Näherungswerte mit einer maximalen Genauigkeit von vier Nachkommastellen.

Tangentengleichung selbst entwickeln mit GTR-Unterstützung

1. Die Ableitung $f'(x)$ selbst bilden und als **Y2** eingeben. Nun im Rechenmodus den y -Wert des Berührungspunktes mittels $Y1<-1>$ berechnen und die Steigung m der Tangente mit $Y2<-1>$.
2. Die Ergebnisse $3\frac{1}{15}$ bzw. $-\frac{4}{5}$ in die allgemeine Form der Geradengleichung einsetzen:
 $3\frac{1}{15} = -\frac{4}{5} \cdot (-1) + n$ und die Gleichung nach n auflösen. Entweder selbst lösen (empfohlen) oder den GTR mit solveN() lösen lassen: **solveN(Y1<-1>=Y2<-1>×<-1>+n,n)** **[EXE]**
Man erhält $n = 2\frac{4}{15}$ und damit die exakte Tangentengleichung $y = -\frac{4}{5} \cdot x + 2\frac{4}{15}$.

Vorteile der Methode: Man erhält eine Tangentengleichung mit exakten Werten.

Nachteile der Methode: Man sieht weder Graph noch Tangente (keine optische Kontrolle möglich) und die Berechnung ist aufwändiger als die Fix-und-Fertig-Tangente im Graph-Modus.

Ableitungen berechnen

Zwar kann der GTR keine Ableitungsterme berechnen, wohl aber den Wert der 1. und 2. Ableitung an einer beliebigen Stelle. Wurde $f(x)$ als **Y1** eingegeben, kann man im **Rechenmodus** z.B. $f'(3)$ wie folgt berechnen: **[OPTN] [CALC] $\frac{d}{dx}$** . In den Platzhalter (\square) wird **Y1** eingeben

(**[VAR] [GRAPH] [Y] [1]**), in den Platzhalter $x=\square$ der Wert 3, dann **[EXE]** drücken. Ergebnis: 10,4.

Die Berechnung vieler Werte ist langsam und eignet sich u.a. darum nicht als Ersatz für selbst gebildete Ableitungsterme, aber zumindest zur „optischen Probe“, ob eine Ableitung stimmt:

Im **Graph-Modus** den Graphen von $f'(x)$ als **Y2** zeichnen lassen und ein gutes Zeichenfenster festlegen. Nun erhält **Y4** die vom GTR berechnete Ableitung wie folgt: **[OPTN] [CALC] $\frac{d}{dx}$** .

In den Platzhalter (\square) wird dann **Y1** eingeben: **[Y] [1] [EXE]**. Wähle Zeichenstil „dicke Punkte“.

Nun lässt man beide Graphen zeichnen: Sind sie deckungsgleich, ist die Ableitung richtig.

Das gleiche funktioniert auch für die 2. Ableitung, in dem man **$\frac{d^2}{dx^2}$** statt **$\frac{d}{dx}$** verwendet.



Krümmung und Wendepunkte

Aufgabe: Krümmungsverhalten und Wendepunkte für $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 2\frac{1}{4}x - 2$.

Rationale Werte immer als Bruchzahl notieren! Näherungswerte auf 4 Nachkommastellen runden.

Beachte: Anders als lokale Extrempunkte lassen sich Wendepunkte im Graph-Modus mit den Methoden von {G-Solve} nicht direkt berechnen. Wenn das Bilden der Ableitungen aufwändig ist, dann empfiehlt sich die Untersuchung von f' auf lokale Extremstellen, ansonsten die Untersuchung von f'' auf Nullstellen, um die Wendestellen zu ermitteln. Auf diesem Blatt wird die letztgenannte Methode verwendet, d.h. die 2. Ableitung muss selbst gebildet werden.

Tipp: Ableitungen überprüfen durch „optische Probe“ (↗GTR-Rezept 8).

Graphisches Lösen

1. Terme eingeben: $f(x)$ als **Y1**, $f'(x)$ als **Y2**, $f''(x)$ als **Y3**. Dann das Zeichenfenster über {V-Window} sinnvoll einstellen (↗GTR-Rezept 3) und die Graphen zeichnen lassen.

Empfehlung: Da der Graph von f' hier nicht benötigt wird, aber vermutlich für andere Aufgabenteile schon eingegeben wurde, sollte man **Y2** deselektieren (aber nicht entfernen), so dass nur die Graphen f (**Y1**) und f'' (**Y3**) gezeichnet werden. Zur Unterscheidung der Graphen ist es außerdem sinnvoll, mittels verschiedene Zeichenstile festzulegen.

2. Wenn die Graphen fertig gezeichnet sind, die erste Nullstelle von f'' (**Y3**) berechnen lassen: {G-Solv} Oben im Display wird der Term von **Y1** angezeigt, mit würde also die erste Nullstelle von **Y1** berechnet. Mittels Taste wechselt man zum nächsten gezeichneten Graphen, hier also dem von **Y3**. Dann mit die Nullstellenberechnung starten und die weiteren Nullstellen wie üblich mit der Taste ermitteln und notieren(!).
Für unser Beispiel ergeben sich zwei Nullstellen von f'' . Da beide erkennbar einen Vorzeichenwechsel haben (hinreichende Bedingung), handelt es sich bei den gefundenen Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 0$ um Wendestellen. Die y -Werte zu den Wendestellen berechnet man mit einer der bekannten Methoden (↗GTR-Rezept 6) und erhält $W_1(-3 | 1\frac{3}{8})$ und $W_2(0 | -2)$.
3. Wenn die Wendestellen bekannt sind, lassen sich die Krümmungsintervalle angeben:
Für $x < -3$ ist der Graph linksgekrümmt (am Graphen erkennbar)
Für $-3 < x < 0$ ist der Graph rechtsgekrümmt (am Graphen erkennbar)
Für $x > 0$ ist der Graph linksgekrümmt (am Graphen erkennbar)

Vor- und Nachteile der Methode: ↗GTR-Rezepte 5 und 7.

Gleichungslöser

1. Sofern nicht schon geschehen: Terme $f(x)$ und $f''(x)$ als **Y1** und **Y3** im Graph-Modus eingeben. Nun den Gleichungslöser aufrufen:
2. Da nur dort Wendestellen sein können, wo $f''(x) = 0$ ist (notwendige Bedingung), berechnen wir die Nullstellen von f'' . Das Vorgehen ist das gleiche wie bei der Nullstellenberechnung (↗GTR-Rezept 5). **Y3** liefert -3 und 0 als potentielle Wendestellen. Mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums (hinreichende Bedingung) wird nun geprüft, ob es sich auch tatsächlich um Wendestellen handelt. Dazu müssen Funktionswerte von f'' (**Y3**) links und rechts der potentiellen Wendestellen berechnet werden. Dies ist bekanntlich (↗GTR-Rezept 6) direkt im Rechenmodus möglich: **<-4>** liefert $f''(-4) = 2$, **<-2>** liefert $f''(-2) = -1$ und **<1>** liefert $f''(1) = 2$, es liegen also bei $x = -3$ und $x = 0$ Vorzeichenwechsel vor, es handelt sich tatsächlich um Wendestellen. Die y -Werte lassen sich entsprechend berechnen (↗GTR-Rezept 6).
3. Das Krümmungsverhalten ergibt sich aus den gerade berechneten Werten von f'' an den Stellen -4 , -2 und 1 . Die Krümmungsintervalle sind die gleichen wie oben angegeben.

Vor- und Nachteile der Methode: ↗GTR-Rezepte 5 und 7.

Lineare Gleichungssysteme



Aufgabe: Bestimme die Lösungsmenge des LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & -6 \\ -1 & 4 & -3 & -11 \\ 2 & 2 & -3 & -16 \end{array} \right).$$

Spezieller Gleichungslöser für LGS

1. **MENU** **SIML** Unser LGS hat drei Unbekannte, also \mathbb{R}^3
2. In die einzelnen Felder werden die Koeffizienten der erweiterten Matrix eingegeben. Jede Eingabe wird mit **EXE** abgeschlossen. Achtung: Brüche werden dargestellt als $\frac{1}{2}$ usw. Nach Eingabe aller Koeffizienten die Gleichung mit **SOLV** lösen. Die Lösung des LGS erscheint in Listendarstellung untereinander. Über **F-D** lässt sich die Zahlendarstellung ändern. Die Lösungsmenge lautet: $L = \{(-4,5 \mid -4,25 \mid -0,5)\}$

ACHTUNG: Der Gleichungslöser kommt nur mit eindeutig lösbareren LGS zurecht!

Beispiel: Ersetze in der letzten Zeile den Koeffizient -3 durch -1 und löse das LGS erneut. Der Gleichungslöser liefert einen „mathematischen Fehler“ – und zwar ohne jegliche Erklärung. Ob das LGS gar keine Lösung hat oder unendlich viele und welche das ggf. sind, lässt sich nicht erkennen. In solchen Fällen hilft nur der Einsatz von Matrizen(operationen), und zwar so:

Gauß-Verfahren für LGS in Matrixschreibweise

Der GTR verfügt über den Befehl **Rref** (engl. reduced row echelon form = reduzierte Zeilenstufenform = normalisierte Diagonalform), durch den eine erweiterte Koeffizientenmatrix unter Verwendung des Gauß-Verfahrens in normalisierte Diagonalform umgewandelt wird.

1. **Rref**-Befehl aufrufen: **MENU** **OPTN** **MAT** **[>]** **Rref**
Danach **EXIT** **EXIT** drücken, um die Befehlszeile zurückzusetzen auf: **JUMP DEL** **MAT MATH**
2. Nun die erweiterte Koeffizientenmatrix hinter **Rref** eingeben: **MATH** **MAT** **[MxN]**

Es öffnet sich ein kleines Auswahlfenster, um die Dimension der Matrix festzulegen.

Wir wählen $m=3$ (Zeilenanzahl) und $n=4$ (Spaltenanzahl). Eingaben mit **EXE** abschließen.

Hinter **Rref** erscheint eine Eingabemaske für die erweiterte Koeffizientenmatrix, die nun mit den Koeffizienten befüllt werden muss. Der Wechsel zwischen den einzelnen Platzhaltern innerhalb der Matrix erfolgt mit den Pfeiltasten.

Sind alle Koeffizienten eingetragen, wird der **Rref**-Befehl mittels **EXE** ausgeführt und man erhält die rechts abgebildete Darstellung, aus der

sich die Lösung des LGS direkt ablesen lässt: $L = \left\{ \left(-4\frac{1}{2} \mid -4\frac{1}{4} \mid -\frac{1}{2} \right) \right\}$.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -4\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -4\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Dieses Verfahren ist zwar umständlicher als der Einsatz des LGS-Gleichungslösers, hat aber den Vorteil, dass es auch bei nicht-eindeutig lösbareren LGS zum Ziel führt.

Variation 1: Ersetze in der letzten Zeile der *ursprünglichen* Matrix den Koeffizient -3 durch -1 und löse das LGS erneut. Resultat: Entscheidend ist die letzte Zeile, die besagt: $0 = 1$. Diese Aussage ist immer falsch, somit hat das LGS also keine Lösung: $L = \{ \}$.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Variation 2: Ersetze in der letzten Zeile der *geänderten* Matrix den Wert -16 durch -17 und löse das LGS erneut. Resultat: Entscheidend ist die letzte Zeile, die besagt: $0 = 0$. Diese Aussage ist immer wahr, somit hat das LGS unendlich viele Lösungen.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -4\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & -3\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Für Variablen a, b und c gilt: Setze $c = t, t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Gleichung II: } b - \frac{7}{10}t = -3\frac{9}{10} \Leftrightarrow b = \frac{7}{10}t - 3\frac{9}{10}$$

$$\text{Gleichung III: } a + \frac{1}{5}t = -4\frac{3}{5} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{5}t - 4\frac{3}{5} \quad \text{Also: } L = \left\{ \left(-\frac{1}{5}t - 4\frac{3}{5} \mid \frac{7}{10}t - 3\frac{9}{10} \mid t \right) \right\} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$



Integrale

Aufgabe: Berechne $\int_{-1}^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2} \right) dx$.

Beachte: Der GTR berechnet den Wert von Integralen mit Hilfe eines Näherungsverfahrens (als Produktsumme von sehr schmalen Rechtecken). Zwar liefert das Verfahren bei einfachen Polynomen sogar den exakten Wert (das erkennt man daran, dass das Ergebnis als Bruch oder ganze Zahl dargestellt wird), in der Regel aber „nur“ einen Näherungswert. Die Genauigkeit ist allerdings sehr hoch, so dass die Ergebnisse in jedem Fall für uns brauchbar sind.

Direkte Berechnung

1. Im Rechenmodus die Integralmaske aufrufen: MENU RUN-MAT

MATH [>] [dx]

\int \square dx Anschließend mit den Cursortasten durch die Maske navigieren und befüllen:

$$\int_{-1}^4 \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2} dx$$

Bei fehlerfreier Berechnung ergibt sich als Näherungswert des Integrals nach Betätigung von EXE $\approx -0,2083$.

Beachte: Eine mathematisch korrekte Darstellung erfordert die Einklammerung des Terms, weil es sich um eine Summe handelt (siehe Aufgabenstellung). Der GTR benötigt dies nicht.

2. Wird die Integrandenfunktion mehrfach benötigt, dann empfiehlt sich die Verwendung einer Funktionsvariable **Yn** (\nearrow GTR-Rezept 5). Hat man z.B. den Term im Graph-Modus als **Y1** eingegeben, dann berechnet man das Integral so:

$$\int_{-1}^4 Y1 dx$$

Y1 erreicht man über VARS GRAPH [Y] [1] . Achtung: ALPHA $\{Y\}$ [1] funktioniert nicht!

Berechnung mit Flächendarstellung

1. MENU GRAPH Term $f(x)$ als **Y1** eingeben. Dann das Zeichenfenster über $\{V\text{-Window}\}$ sinnvoll einstellen (\nearrow GTR-Rezept 3) und den Graphen zeichnen lassen.

2. Wenn der Graph fertig gezeichnet ist, die Ordinatenfläche über dem Intervall $[-1;4]$ schraffieren lassen: $\{G\text{-Solv}\}$ [>] [dx] . Rechts unten im Display erscheint **LOWER**, was als Aufforderung zu verstehen ist, die untere Intervallgrenze -1 einzugeben und mit EXE zu bestätigen. Nun erscheint **UPPER** und man gibt entsprechend die obere Grenze 4 ein. Als Ergebnis wird die Ordinatenfläche schraffiert und ein Näherungswert des Integrals eingeblendet.

Ergänzung: Integralfunktion

Aufgabe: Zeichne den Graphen der Integralfunktion zur oben gegebenen Integrandenfunktion.

Gesucht ist also der Graph von $I_{-1}(x) = \int_{-1}^x \left(\frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2}t + 1 - \frac{1}{2} \right) dt$.

1. MENU GRAPH Term $I_{-1}(x)$ als **Y2** eingeben: OPTN [F2] CALC [F3] [dx] liefert: $Y2 = \int$ \square dx
Grenzen und Integrandenfunktion eingeben, wobei x sowohl als obere Grenze als auch als Integrationsvariable eingesetzt werden muss.

Alternativ kann statt des Terms der Integrandenfunktion auch **Y1** verwendet werden.

2. Stelle das Zeichenfenster über $\{V\text{-Window}\}$ sinnvoll ein (\nearrow GTR-Rezept 3) und lasse dann die Graphen von **Y1** und **Y2** mit unterschiedlichen Linienstärken in ein gemeinsames Koordinatensystem zeichnen.

3. Berechne den y -Wert von **Y2** an der Stelle $x=4$ mittels Trace-Modus: $\{Trace\}$ [v] [4] [EXE]

Bei richtiger Eingabe ergibt sich (erwartungsgemäß!) $y \approx -0,2083$.

Häufigkeitsverteilungen



Aufgabe: Berechne für die gegebene Häufigkeitsverteilung das arithmetische Mittel und die Standardabweichung und stelle die Daten in einem Histogramm dar.

Wert x	1	2	3	4	5	6	7
h(x)	0,09	0,17	0,21	0,24	0,16	0,08	0,05

Die gesamte Bearbeitung erfolgt im **Statistikmodus**:

Daten eingeben

Werte der Verteilung *spaltenweise* in Listen eingeben: x-Werte in Liste 1, h(x) in Liste 2.

Jeden Wert mit bestätigen. Zum Ändern eines Wertes die Schreibmarke an die jeweilige Stelle setzen und den dortigen Wert überschreiben bzw. zum Entfernen drücken. In die Kopfzeile (Zeile SUB) kann eine Überschrift für jede Liste eingegeben werden. Zum Löschen einer kompletten Liste steht der Befehl zur Verfügung.

Kennzahlen berechnen

1. Berechnung vorbereiten durch (Überprüfung der) Zuordnung der Listen:

Die Werte aus Liste 1 bilden die x-Werte, die aus Liste 2 die Häufigkeiten (engl. frequency).

Die dafür benötigten Festlegungen sind: 1Var XList :List1 und 1Var Freq :List2.

Die Zuordnung erfolgt mittels ergänzt durch die jeweilige Listennummer.

Verlassen wird das Einstellungsfenster mit oder .

2. Berechnungen durchführen mit . Das Ergebnis sollte so aussehen wie rechts abgebildet und enthält u.a. das arithmetische Mittel \bar{x} , die Summe der Produkte aus x-Wert und Häufigkeit Σx und die Standardabweichung σx .

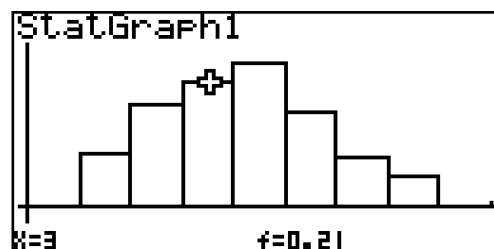
1-Variable	
\bar{x}	=3.65
Σx	=3.65
Σx^2	=15.83
σx	=1.58350876

Hinweis: \bar{x} ist immer eine rationale Zahl, kann also als Bruch (d.h. exakt) dargestellt werden, allerdings liefert die Übersicht der Kennzahlen grundsätzlich nur Dezimalbrüche. Man kann jedoch im Rechenmodus auf die Statistikvariablen zugreifen und erhält dann mittels Taste einen exakten Wert: .

Histogramm zeichnen

1. Zeichnung vorbereiten durch (Überprüfung der) Zuordnung der Listen und Auswahl des Diagrammtyps: . Für x-Werte und Häufigkeit werden wie bei der Berechnung der Kennzahlen Liste 1 und Liste 2 gewählt. Als Diagrammtyp wählt man über die Befehlszeile . Einstellungsfenster verlassen mit oder .

2. Diagramm zeichnen lassen mit . Es öffnet sich zunächst ein Dialogfenster, in dem der Startwert und die Rechteckbreite festgelegt werden müssen. Für unser Beispiel wählen wir als Startwert 1 (weil der kleinste vorkommende x-Wert 1 ist) und als Breite 1 (damit alle Rechtecke ohne Zwischenraum nebeneinander liegen). Nach Bestätigung mit wird das Histogramm gezeichnet und sollte (abgesehen von der Beschriftung) so aussehen wie rechts abgebildet.



3. Mittels {Trace} kann man die einzelnen Rechtecke ablaufen und bekommt die Werte für x und h(x) unterhalb des Histogramms eingeblendet – siehe Abbildung.

Binomialverteilungen



Aufgabe: Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine $B(10;0,4)$ -verteilte Zufallsgröße X . Zeichne ein Histogramm und berechne μ_X und σ_X .

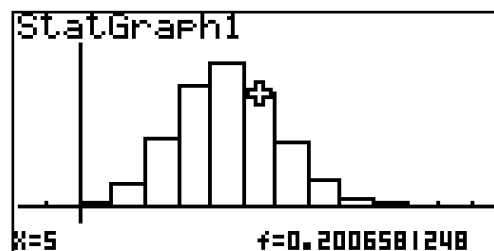
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

MENU **RUN-MAT** **STAT** **DIST** **BINM** **BP2** liefert die Funktion **BinomialPD** („Binomial Probability Distribution“). Sie wird mit n und p befüllt und liefert eine Liste mit allen Werten $P(X=0)$, $P(X=1)$, ..., $P(X=10)$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Damit die Werte im Statistikmodus genutzt werden können, werden sie in Liste 2 gespeichert: **BinomialPD**(10,0,4) **→** **SHIFT** {List} **2** **EXE**.

Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellen

MENU **STAT** In Liste 2 sollten die zuvor berechneten Wahrscheinlichkeiten stehen. Zusätzlich werden nun in Liste 1 alle Werte der Zufallsgröße (0, ..., 10) eingetragen. Man kann dies mit Hilfe der Funktion **Seq**(\rightarrow) tun, aber das ist recht umständlich. Einfacher ist es, die Werte manuell einzugeben. Das Ergebnis sollte so aussehen wie rechts abgebildet. Über **CALC** **1Var** lassen sich $\mu_X = 4$ und $\sigma_X \approx 1,5492$ direkt berechnen, sofern die Zuordnung der Listen korrekt ist. Ansonsten mit **SET** einstellen:
1Var **XList** :List1 und 1Var **Freq** :List2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	6E-3		
2	1	0.0403		
3	2	0.1209		
4	3	0.2149		
				0.040310784



Das Zeichnen des Histogramms funktioniert wie bei Häufigkeitsverteilungen (\nearrow GTR-Rezept 12). Als Startwert wählen wir 0, als Rechteckbreite 1. Das Ergebnis sollte so aussehen wie abgebildet, wenn man mit **SHIFT** {Trace} den Wert $x=5$ wählt.

Ergänzung I: Berechnung von $P(X=k)$, $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$ und $P(k_1 \leq X \leq k_2)$

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X berechnet man $P(X=k)$ mittels der oben schon eingesetzten Funktion **BinomialPD**. Kumulierte Wahrscheinlichkeiten berechnet man mittels **BinomialCD** („Binomial Cumulated Distribution“). Man erreicht die Funktionen über **OPTN** **STAT** **DIST** **BINM**. Die Beispiele in der Tabelle zeigen für eine $B(75; 0,4)$ -verteilte Zufallsgröße X wie es funktioniert (\rightarrow rechne es nach!).

Mathematische Schreibweise	GTR-Eingabe	Ergebnis
$P(X = 30)$	BinomialPD (30,75,0,4)	0,0937
$P(X \leq 26)$	BinomialCD (26,75,0,4)	0,2055
$P(X < 43)$	BinomialCD (42,75,0,4)	0,9982
$P(X \geq 19)$	1-BinomialCD (18,75,0,4)	0,9973
$P(X > 33)$	1-BinomialCD (33,75,0,4)	0,2041
$P(25 \leq X \leq 42)$	BinomialCD (42,75,0,4) - BinomialCD (24,75,0,4)	0,9019
$P(37 < X < 65)$	BinomialCD (64,75,0,4) - BinomialCD (37,75,0,4)	0,0396

Weitere Beispiele zum Nachrechnen:

Für eine $B(100; 0,3)$ -verteilte Zufallsgröße X ist $P(X=36) \approx 0,0362$.

Für eine $B(200; 0,15)$ -verteilte Zufallsgröße X ist $P(X < 29) \approx 0,3914$ und $P(X \geq 44) \approx 0,0053$.

Für ein $B(350; 0,62)$ -verteiltes X ist $P(171 \leq X \leq 222) \approx 0,7267$ und $P(205 \leq X < 274) \approx 0,9151$.

Ergänzung II: Berechnung von Binomialkoeffizienten

Für die Berechnung von Binomialkoeffizienten empfiehlt sich die GTR-Funktion **nCr**, die man über

OPTN **PROB** **nCr** erreicht. **Beispiel:** $\binom{13}{8}$ berechnet man so: **13nCr8**.

Stochastische Prozesse



Aufgabe: Gegeben ist die Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,7 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,7 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ als Startvektor.

Berechne den Zustand des Systems nach einem und nach fünf Übergängen.

Vorbemerkung: Es gibt (mindestens drei) verschiedene Möglichkeiten, Matrizen und Vektoren im GTR einzugeben. Ich empfehle Variante 1 (Verwendung von **Matrizenspeichern**), da man dann über Variablen leicht auf vorherige Matrizen/Vektoren zurückgreifen kann. Auf die Verwendung der speziellen Vektorspeicher kann man verzichten und Vektoren stattdessen als einspaltige Matrizen auffassen. Das Operieren mit Matrizen und Vektoren erfolgt im Rechenmodus.

Tipp 1: Über $\text{SHIFT}\{\text{SETUP}\}\text{Display Fix } 4$ kann man festlegen, dass die Ergebnisse sämtlicher Berechnungen auf vier Nachkommastellen gerundet ausgegeben werden.

Tipp 2: Da die Koeffizienten stochastischer Matrizen im Intervall $[0; 1]$ liegen, kann man Zeit sparen, indem man die führende Null weglässt. Diese Schreibweise ist jedoch *mathematisch falsch!*

Tipp 3: F-D zur Umwandlung der Zahlendarstellung funktioniert auch für komplette Matrizen!

Übergangsmatrix als Matrix A speichern

Variante 1: MAT öffnet das Matrizenfenster. Mit der Navigationstaste Mat A auswählen und mit DIM als Dimension für m (= Zeilenzahl) und n (= Spaltenzahl) jeweils 3 eingeben. Nach Bestätigung mit EXE erscheint eine Matrix-Eingabemaske, in die man die Koeffizienten von A eingibt, jeweils mit EXE bestätigen. Über EXIT EXIT kommt man zurück ins Rechenfenster.

Variante 2: MATH MAT bietet in der Befehlszeile verschiedene feste Matrizenformate und ein frei definierbares Format $\text{m} \times \text{n}$ an. Nach Auswahl des gewünschten Formats erhält man direkt im Rechenfenster eine Matrix-Eingabemaske, die man nun befüllt. ACHTUNG: Die Eingabe der einzelnen Koeffizienten *nicht* mit EXE bestätigen, sondern mit der Navigationstaste durchlaufen. Nach vollständiger Befüllung wird die Matrix nun als Matrix A gespeichert. Dazu setzt man die Schreibmarke rechts neben die Matrix, drückt die Zuweisungstaste = und wählt dann den Matrixspeicher A als Ziel: $\text{=}\ \text{SHIFT}\{\text{Mat}\}\ \text{ALPHA}\{\text{A}\}\ \text{EXE}$

Variante 3: Mit Hilfe von eckigen Klammern lassen sich Matrizen auch ohne Eingabemaske direkt im Rechenfenster eingeben und als Matrix A speichern. Für unser Beispiel sieht es so aus:

$[[0.3,0.2,0.7][0.4,0.5,0.1][0.3,0.3,0.1]]\ \text{=}\ \text{SHIFT}\{\text{Mat}\}\ \text{ALPHA}\{\text{A}\}\ \text{EXE}$

Zustandsvektor als Matrix C speichern

Die gleichen Möglichkeiten gibt es auch für den Zustandsvektor, den man als 3×1 -Matrix auffasst.

Zustand nach einem und fünf Übergängen berechnen

Die Berechnung ist unabhängig von der gewählten Eingabemethode, sofern die Matrix als Mat A und der Vektor als Mat C gespeichert wurden: $\text{SHIFT}\{\text{Mat}\}\ \text{ALPHA}\{\text{A}\}\ \text{X}\ \text{SHIFT}\{\text{Mat}\}\ \text{ALPHA}\{\text{C}\}\ \text{EXE}$

Bei Bedarf kann das Ergebnis – der Zustand nach *einem* Übergang – auch für weitere Berechnungen in einem Matrixspeicher abgelegt werden: $\text{=}\ \text{SHIFT}\{\text{Mat}\}\ \text{ALPHA}\{\text{D}\}\ \text{EXE}$

Der Zustand nach fünf Übergängen berechnet sich am schnellsten über die fünfte Potenz der Übergangsmatrix: $\text{SHIFT}\{\text{Mat}\}\ \text{ALPHA}\{\text{A}\}\ \text{^}\ 5\ \text{X}\ \text{SHIFT}\{\text{Mat}\}\ \text{ALPHA}\{\text{C}\}\ \text{EXE}$

$\begin{bmatrix} 0.3737 \\ 0.3535 \\ 0.2727 \end{bmatrix}$

Das Ergebnis sollte – bei Einstellung $\text{FIX}4$ – so aussehen wie rechts abgebildet.

Vektoren



Vorbemerkung: Die Einsatzmöglichkeiten des GTR in der analytischen Geometrie sind recht begrenzt. Wünschenswert wäre z.B. die Fähigkeit, Schnittpunkte oder Abstände von Geraden direkt berechnen zu können. Dies ist jedoch nicht möglich. Abgesehen vom Lösen eines LGS (↗GTR-Rezept 10) kann der GTR nur grundlegende Operationen mit Vektoren ausführen. Der Einsatz der speziellen Vektorfunktionen lohnt sich dabei nur in wenigen Fällen, weil der Aufwand für die Eingabe der Vektoren relativ zum eingesparten Rechenaufwand (etwa bei der Berechnung des Skalarprodukts oder des Betrages eines Vektors) zu hoch ist.

Außer der nachfolgend gezeigten Eingabemethode mit Hilfe von **Vektorspeichern** gibt es noch weitere (fehleranfällige) Varianten, in denen Vektoren als Matrizen aufgefasst werden (↗GTR-Rezept 14) – diese werden hier nicht behandelt.

Grundsätzlich gilt für alle Varianten: **Das Rechnen mit Vektoren erfolgt im Rechenmodus.**

Vektoren in Vektorspeicher eingeben

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sollen als $\text{Vect } A$ und $\text{Vect } B$ gespeichert werden.

➤**MAT** **M→V** öffnet das Vektorfenster. Mit der Navigationstaste **Vect** A auswählen und mit **Dim** als Dimension für $m = 3$ (Zeilenzahl) und $n = 1$ (Spaltenzahl) eingeben. Nach Bestätigung mit **EXE** erscheint eine Vektor-Eingabemaske, in die man die Koeffizienten von \vec{a} eingibt; jeweils mit **EXE** bestätigen. Über **EXIT** kommt man zurück ins Vektorfenster und gibt nun **Vect** B auf die gleiche Weise ein. Anschließend verlässt man mit **EXIT** auch das Vektorfenster und gelangt wieder zurück in den Rechenmodus.

Berechnungen mit Vektoren durchführen

Im Rechenmodus erreicht man über **OPTN** **MAT** [\triangleright] [\triangleright] die **Vektor-Befehlszeile**, die so aussieht:

Vect **DotP** **CrsP** **Angle** **UntV** [\triangleright] **Norm**.

Man benötigt **Vect** zum Abrufen der Vektorspeicher, die übrigen Befehle sind Vektorfunktionen. → Tabelle:

Befehl	Vect	DotP	CrsP	Angle	UntV	Norm
englisch	vector	dot-product	cross-product	angle	unit-vector	norm
deutsch	Vektor	Skalarprodukt	Vektorprodukt	Winkel	Einheitsvektor	Betrag

Am Beispiel der Berechnung des **Skalarprodukts** sieht man das grundsätzliche Vorgehen:

DotP **Vect** **(ALPHA)** **{A}** **↵** **Vect** **(ALPHA)** **{B}** **↵** **EXE** Im Display steht: $\text{DotP}(\text{Vect } A, \text{Vect } B) = 7$

Entsprechend berechnet man das **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt) und erhält als Ergebnis $\begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ -21 \end{bmatrix}$

Mittels **angle** lässt sich **der von zwei Vektoren eingeschlossene Winkel** berechnen:

Angle **Vect** **(ALPHA)** **{A}** **↵** **Vect** **(ALPHA)** **{B}** **↵** **EXE** Im Display steht: $\text{Angle}(\text{Vect } A, \text{Vect } B) = 75.0368$

ACHTUNG: Der Winkel wird in der Einheit ausgegeben, die im {Setup} eingestellt wurde (↗GTR-Rezept 2). Benötigt wird das Ergebnis in Gradmaß, die richtige Einstellung ist also:

(SHIFT) **{SETUP}** und dort dann **Angle:** **Deg**

Den **Einheitsvektor** zu einem Vektor berechnet man mit **UntV** **Vect** **(ALPHA)** **{A}** **↵** **EXE**, den **Betrag** eines Vektors mit **Norm** **Vect** **(ALPHA)** **{A}** **↵** **EXE** Im Display steht dann: $\text{Norm}(\text{Vect } A) = \sqrt{21}$

Addieren und **Subtrahieren** kann man Vektoren im übrigen auch, und zwar mit den üblichen Rechenzeichen: **Vect** **(ALPHA)** **{A}** **+** **Vect** **(ALPHA)** **{B}** **↵** **EXE** liefert als Ergebnis: $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$