Kombinationen mit Zurücklegen

– Herleitung der Formel –

1. Den – etwas schwierigeren – Fall ungeordneter Stichproben mit Zurücklegen behandeln wir mit Hilfe der **Umkehrung des Urnenmodells** (vgl. S. 97, S. 101).

Beispiel: Auf drei Urnen U_1, U_2, U_3 sollen sechs nicht unterscheidbare Kugeln verteilt werden. Auf wievielfache Weise ist dies möglich? Bild 7.1 zeigt drei mögliche Ergebnisse.

Wir können diese Fälle auf die folgende Weise durch Ziffernfolgen kennzeichnen:
jede Kugel erfassen wir durch eine „0“, jede „Trennwand“ zwischen zwei Urnen durch eine „1“.
Dann kennzeichnen die folgenden Ziffernfolgen die drei Fälle von Bild 7.1:
1) 00101000 2) 00001100 3) 10100000

	U_1	U_2	U_3
1)	○○	○	○○○
2)	○○○○		○○
3)		○	○○○○○

Bild 7.1

Steht eine „1“ am Anfang oder am Ende der Ziffernfolge, so bedeutet dies, daß die erste oder die letzte Urne leer ist; stehen zwei Einsen nebeneinander, so bedeutet dies, daß die „dazwischen“ gelegene Urne leer ist. Die Anzahl der Nullen zwischen zwei Einsen gibt die Zahl der Kugeln in der betreffenden Urne an.

Die Frage unseres Beispiels ist damit zurückgeführt auf die Frage, auf wievielfache Weise 6 Nullen und 2 Einsen auf 8 Plätze verteilt werden können.

Zunächst gibt es nach S 6.5b genau 8! verschiedene Möglichkeiten, die 8 Plätze mit 8 verschiedenen Objekten zu belegen. Nun sind die 6 Nullen aber nicht unterscheidbar; alle Belegungen, die durch Vertauschen der 6 Nullen untereinander entstehen, stellen dieselbe Stichprobe dar; dies sind jeweils 6! verschiedene Möglichkeiten.
Auch die beiden Einsen sind nicht unterscheidbar; alle Belegungen, die durch Vertauschen der beiden Einsen entstehen, stellen ebenfalls dieselbe Stichprobe dar; dies sind jeweils 2! verschiedene Möglichkeiten.
Somit gibt es insgesamt $\frac{8!}{6!\,2!}$ verschiedene Belegungen der 8 Plätze mit 6 Nullen und 2 Einsen.

Es gilt:
$$\frac{8!}{6!\,2!}=\frac{8\cdot 7}{2}=4\cdot 7=28\,.$$
Damit ist auch unser ursprüngliches Problem gelöst: es gibt 28 verschiedene Möglichkeiten, sechs nicht unterscheidbare Kugeln auf drei Urnen zu verteilen.

2. Bei k Kugeln und n Urnen enthält die eine Verteilung kennzeichnende Ziffernfolge k Nullen und $n-1$ Einsen, insgesamt also $k+n-1$ Plätze. Durch die gleichen Überlegungen wie bei unserem Beispiel ergibt sich für die Gesamtzahl der möglichen Verteilungen:

$$\frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}\,.$$

Dieser Term kann in doppelter Weise als Binomialkoeffizient geschrieben werden; denn es gilt

$$\frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}=\binom{k+n-1}{k}=\binom{k+n-1}{n-1}\,.$$

Gehen wir nun zum ursprünglichen Urnenmodell zurück, so bezeichnet n die Anzahl der Elemente in der Urne und k den Umfang der Stichprobe.